EDUCAÇÃO, SAÚDE E TECNOLOGIA
26 A 28 DE OUTUBRO DE 2021
XXV SEPE Simpósio de Ensino, Pesquisa e Extensão
EDIÇÃO VIRTUAL
ISSN: 2316-9745
TRABALHO COMPLETO
UFN Universidade Franciscana

UMA ABORDAGEM DE ESPAÇOS VETORIAIS POR MEIO DA GEOMETRIA DINÂMICA

http://doi.org/10.48195/sepe2021-123

Igor da Rocha Lazzarotto [1]; Anne Desconsi Hasselmann Bettin [2]; José Carlos Pinto Leivas[3]

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo interpretar e refletir sobre o ensino de espaços vetoriais por meio do GeoGebra com base na teoria de Duval. Busca estabelecer reflexões e conexões, formas de representação e de construção de conceitos iniciais de Álgebra Linear por meio da visualização com a construção geométrica no GeoGebra. Além disso, são sugeridas algumas atividades que podem ser aplicadas nessa perspectiva. Acreditamos que essa forma de abordar o conteúdo seja mais significativa para o aluno e proporcione mais conhecimentos, a exemplo do que foi experienciado em uma disciplina de curso de um programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática ministrada pelo terceiro autor tendo como participante os dois primeiros.

Palavras-chave: Geometria; GeoGebra; Vetores.

Eixo Temático: Educação, Cultura e Comunicação.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho é resultado de uma reflexão acerca do estudo dos espaços vetoriais com o uso de softwares de geometria dinâmica GeoGebra. Foi explorada a construção de conceitos introdutórios da Álgebra Linear a partir da visualização e dos registros figurais. Essa reflexão foi iniciada em uma disciplina em Ensino de Ciências e Matemática e procurou explorar os aspectos visuais do estudo dos espaços vetoriais, tendo se mostrado um caminho promissor para a compreensão, o ensino e a aprendizagem do conteúdo.

Dessa forma, o artigo tem por objetivo estabelecer reflexões e conexões, formas de representação e de construção de conceitos iniciais de Álgebra Linear por meio da visualização com a construção geométrica no GeoGebra.

1 Igor da Rocha Lazzarotto - Universidade Franciscana - UFN. igorlazzarotto777@hotmail.com
2 Anne Desconsi Hasselmann Bettin - Universidade Franciscana - UFN. annedesconsi@gmail.com
3 José Carlos Pinto Leivas - Universidade Franciscana - UFN. leivasjc@ufn.edu.br
2

ISSN: 2316-9745
TRABALHO COMPLETO

Percebemos, em nossa atuação na escola que, embora muitas tenham laboratórios de informática, não têm computadores suficientes para todos os alunos. Dessa forma, o professor pode buscar outras alternativas, como o uso de aplicativos e smartphones, os quais são mais rápidos e fáceis de manusear e de instalá-los.

Entendemos que, no ensino da matemática, o uso de aplicativos torna o ensino mais agradável na perspectiva do visual para o aluno. Uma ferramenta que tem se tornado uma aliada é o aplicativo GeoGebra, de fácil instalação, acesso gratuito (inclusive versões para smartphones).

2. ESPAÇOS VETORIAIS

Na natureza existem dois mundos, um real e um percebido, em que cada indivíduo percebe o universo de uma maneira específica. Por exemplo, as ondas luminosas existem, mas se o indivíduo não puder enxergar, não haverá cor, da mesma forma ocorre com as ondas sonoras para não ouvintes, isto é, não há som se não há alguém para ouvir.

A geometria buscou representar o mundo perceptível e Euclides organizou os objetos geométricos como pontos, retas, planos e espaços em dimensões, sendo que o ponto tem dimensão zero, a reta tem dimensão 1, o plano tem dimensão 2 e o espaço tem dimensão 3. Para Euclides, o mundo era tridimensional, mas com a expansão da linguagem da geometria euclidiana por René Descartes surgem especulações da possibilidade de uma quarta dimensão.

Conforme Leivas (2021), “a questão do mundo euclidiano, real e perceptível, ainda subsiste, e cada indivíduo tem sua forma própria de perceber o universo, havendo dificuldades na compreensão de qualquer dimensão além desse mundo euclidiano” (p. 18).

O espaço vetorial sobre um conjunto de escalares, é basicamente um conjunto que contempla operações de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares, as quais satisfazem certas propriedades. No espaço real R (cuja representação geométrica pode ser feita por uma reta), os elementos geométricos são unidimensionais, ou seja, possuem apenas uma coordenada cartesiana (comprimento de um segmento, por exemplo). Uma base desse espaço vetorial é formada por um único vetor linearmente independente (L.I.), o qual é gerador desse espaço. No nosso dia a dia podemos medir, comparar grandezas de mesma espécie, perceber a representação desse espaço em objetos como linhas, cordas, vinco de uma folhas etc.

No espaço vetorial R X R = R^2 (cuja representação geométrica é o plano) são necessárias duas coordenadas (cartesianas) para localizar o objeto neste espaço: comprimento e largura. Neste caso, uma base desse espaço vetorial é formada por um conjunto de dois vetores L.I., os quais o geram. No cotidiano, podem ser objetos 2D como as faces de uma caixa, (as quais possuem comprimento e largura); um tampo de mesa; uma parede lisa etc.

No espaço R X R X R = R^3 (espaço geométrico), são necessárias três coordenadas cartesianas para identificar seus objetos: comprimento, largura e altura, o que o caracteriza como espaço tridimensional. Assim, ternas ordenadas de números reais são essenciais para descrevê-lo e uma base desse espaço vetorial é formada por um conjunto de três vetores L.I. que o geram. Pode-se perceber no cotidiano muitos exemplos, ou seja, os objetos geométricos em 3D, por exemplo, são prismas, paralelepípedos etc.

No espaço vetorial R X R X R X R = R^4 ou hiperespaço, quando analisado geometricamente, tem por base um conjunto de quatro vetores L.I. geradores desse espaço. Uma base para este espaço é constituída de quatro vetores L.I. e geradores do mesmo, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, o qual, portanto, tem dimensão quatro. Percebemos aqui que não há uma visualização geométrica como nos anteriores, no sentido dos objetos euclidianos. No entanto, podemos fazer analogias com o espaço de matrizes 2x2 que constituem um espaço vetorial ao qual os vetores geradores e L.I. seriam quatro matrizes tendo um elemento unitário em cada posição, por exemplo.

Um exemplo de aplicabilidade das matrizes do R^4 são as que fornecem a resolução espacial existentes em televisores digitais, tablets, smartphones etc, com os pixels de resolução (512x512, 1024x1024 etc). Computacionalmente, pixel constitui base para o aprimoramento da imagem digital, da mesma forma que na ressonância magnética, ou seja, quanto maior a matriz é possível melhor observar uma patologia apresentada por um indivíduo. Assim, pode-se continuar até os espaços abstratos R^n, sendo n um número natural.

A partir desses preliminares, consideramos que essas noções nem sempre são compreendidas pelos alunos, ficando meramente no plano abstrato. No entanto, entendemos que podem ser desenvolvidas, especialmente na formação do professor de Matemática, bem como de Física, explorando o uso do GeoGebra

2.1 Representações Semióticas de vetores

Para Duval (2008, p. 15), “a compreensão em Matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica” e, dessa forma, saber transitar entre os diferentes registros de representação é de suma importância para a aprendizagem. Por exemplo, um estudante que inicia operações com vetores em Física, ao final do Ensino Fundamental ou Ensino Médio, realiza algebricamente a operação adição de vetores: u+v = (1,2)+(3,4) = (1+3,2+4) = (4,6) (registro numérico). Para o registro figural (representação geométrica), em geral, o estudante apresenta dificuldades e, até mesmo, quanto ao registro em língua natural. Senão vejamos o exemplo de utilização da conversão do registro algébrico/ numérico para o geométrico por meio da exploração no Geogebra.

Doravante, um vetor de um desses espaços vetorias reais será denotado por um número real (a), um par ordenado (a,b) ou uma terna ordenada (a,b,c), conforme o espaço seja a reta, o plano ou o espaço, respectivamente. Esses elementos são as estremidades do vetor cuja origem se encontra na origem do sistema cartesiano, isso no mundo perceptível. Por extensão no R^n, de forma abstrata, a extremidade é uma n-upla, o que sai do plano perceptível.

Exemplos:

Registro algébrico/numérico de um vetor:

Para qualquer par ordenado (a,b) pertencente ao R^2 tem-se o vetor:

$(a,b) = (a,0)+(0,b)=a(1,0)+b(0,1)=ae_1+be_2$. (sendo e_1, e_2, como antes).

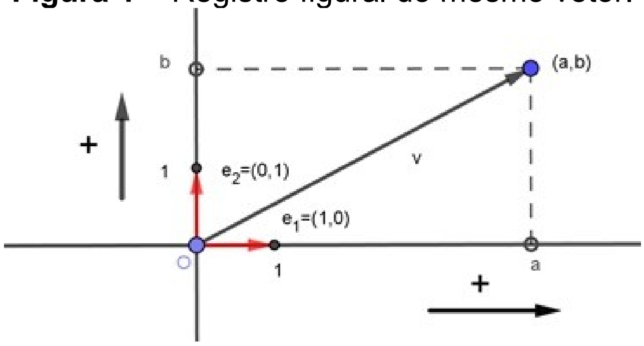
Registro em língua natural deste mesmo vetor:

Considere $\{e_1, e_2\}$ uma base ou unidade para R^2 e, dessa forma, o vetor ae_1+be_2 é dito combinação linear dos vetores e_1, e_2. A dimensão desse espaço é 2 pois sua

EDUCAÇÃO, SAÚDE E TECNOLOGIA
26 A 28 DE OUTUBRO DE 2021
XXV SEPE Simpósio de Ensino, Pesquisa e Extensão
EDIÇÃO VIRTUAL
ISSN: 2316-9745
TRABALHO COMPLETO
UFN Universidade Franciscana

base é constituída de dois vetores [linearmente independentes e geradores]. O isomorfismo, neste caso, é entre o plano euclidiano E e o R^2 conforme Figura 1.

Figura 1 – Registro figural do mesmo vetor.



Fonte: autores.

Segundo Duval (2008),

> o não reconhecimento do mesmo objeto matemático, em representações diferentes, limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizarem os conhecimentos matemáticos já adquiridos e suas possibilidades de considerarem novos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem (p.21).

Para uma melhor visualização, compreensão e aprendizagem, o software GeoGebra pode ser um artefato com potencial pedagógico que possibilita utilizar conhecimentos já adquiridos, modificar, aceitar ou rejeitar bem como desenvolver novos.

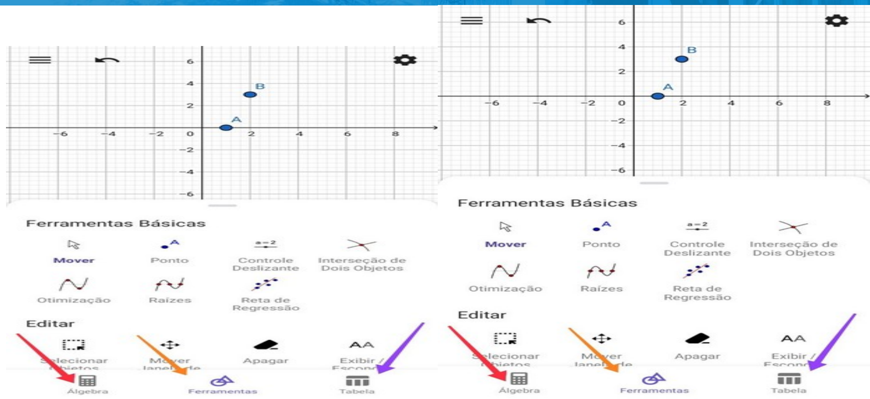
2.2 O GeoGebra

O GeoGebra é um software gratuito reunindo ferramentas de geometria, álgebra e cálculo em até três dimensões. Pode ser usado como meio para auxiliar na compreensão e na construção de conceitos físicos e matemáticos, bem como na visualização da representação geométrica.

Com o objetivo de proporcionar o primeiro contato do aluno com o GeoGebra, na Figura 2 mostramos alguns comandos para as representações geométricas, onde as regiões das setas vermelha, laranja e lilás, temos a seleção das ferramentas do programa. Álgebra (barra de comandos algébricos). As ferramentas (regiões onde são ativados vetores, semi retas, retas etc.) e Tabelas.

Figura 2 – Tela capturada do software.

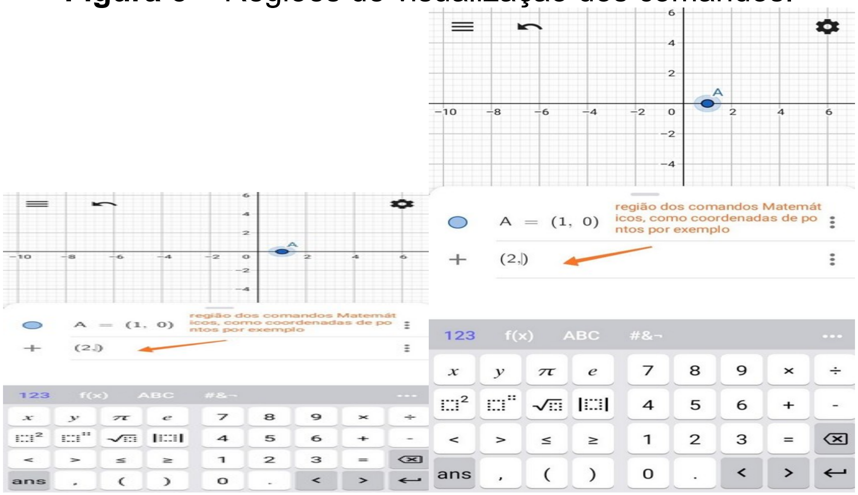
ISSN: 2316-9745
TRABALHO COMPLETO



Fonte: autores.

Na Figura 3 consta um ponto A e a região dos comandos matemáticos.

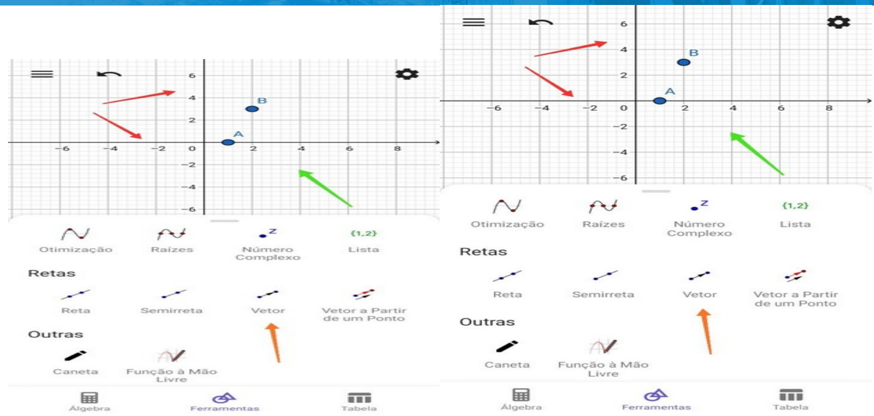
Figura 3 – Regiões de visualização dos comandos.



Fonte: autores.

Na Figura 4 são indicadas as setas vermelhas mostrando os eixos x e y, enquanto que a seta verde indica a região do quadriculado e a laranja a ferramenta do vetor na linha das retas.

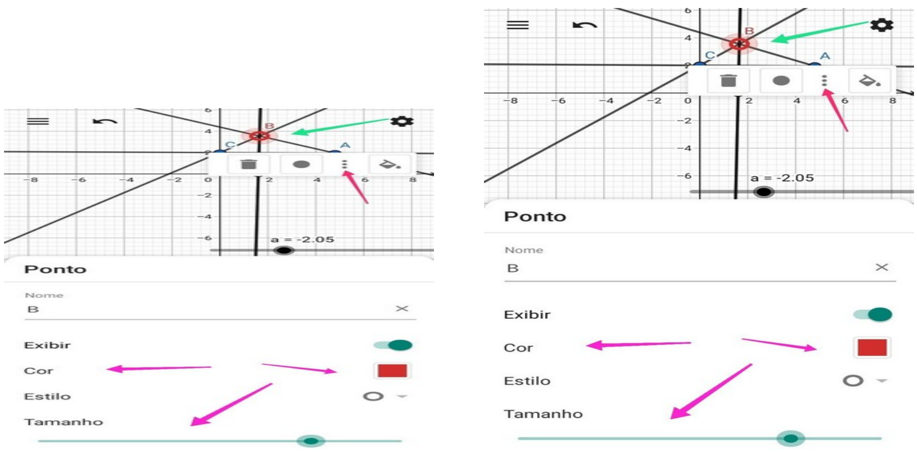
Figura 4 - As regiões do GeoGebra.



Fonte: autoria própria.

Quando temos a intenção de destacar um ponto específico, podemos ativar as propriedades do ponto com o botão direito do mouse ou, no *tablets touch*, segurar no ponto (seta verde), abrindo-se uma caixa de ferramentas (seta vermelha). No ícone da seta vermelha poderá ser manipulada cor, tamanho, estilo (setas rosas), como na Figura 5.

Figura 5 - Propriedades dos objetos.



Fonte: os autores.

2.3 A visualização

Para interpretar e compreender o mundo, por meio da visualização, podemos criar e interpretar representações.

Segundo Arcavi (1999),

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a

> finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão (p. 217).

O GeoGebra auxilia nas diferentes formas de representações e visualizações, no desenvolvimento das ideias não conhecidas como afirma Arcavi (1999) e, ao passo que vai conectando os conhecimentos antigos com os novos, auxiliados pela visualização, o estudante avança na compreensão do objeto matemático em estudo.

Para Leivas (2009, p. 22) a visualização é "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos". Dessa forma, o conhecimento pode ser construído por meio do GeoGebra, podendo representar e construir conceitos matemáticos formando imagens mentais, transitando entre as diferentes formas de registros de representação semiótica, ampliando a capacidade de utilizar e adquirir novos conhecimentos.

3. O ESTUDO DOS ESPAÇOS VETORIAIS POR MEIO DA GEOMETRIA DINÂMICA

Por meio de um levantamento bibliográfico das publicações no no catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, usando as plavras-chave: "espaço vetorial AND geometria" AND "GeoGebra", resultou em apenas 04 trabalhos referente ao mestrado profissional, sendo 02 apresentando uma abordagem de vetores ao ensino médio, 01 referente a geometria projetiva e 01 apresentação do Teorema de Mamikon, mostrando a necessidade mais pesquisas sobre esse assunto.

Com base nas reflexões apresentadas, neste artigo sugerimos algumas atividades a serem implementada, particularmente, no Ensino Médio a fim da interação dos alunos com o aplicativo GeoGebra no ensino de matemática.

O conhecimento de vetores, na Matemático ou na Fisica, está intrínseco na maioria dos conhecimentos relacionados ao cotidiano. Por exemplo, a direção de uma determinada trajetória de um objeto no espaço, de um avião, de um ônibus, de um carro ou até mesmo de uma partícula no espaço ou no vácuo, pode ser

ISSN: 2316-9745
TRABALHO COMPLETO

abordada vetorialmente. Contudo, com a ferramenta educacional e virtual como o GeoGebra, isso pode ser facilitado.

Grandezas que necessitam de direção e sentido são chamadas vetoriais. Para orientação em um mapa uma atividade para compreender esses conceitos, por exemplo, é seguir por tal rua que, visualizada na horizontal (direção), andar duas quadras no sentido leste até chegar a uma igreja (sentido).

Para as grandezas que necessitam de direção, sentido, além de uma medida, essas são chamadas de grandezas vetoriais. Conceitos como esses nem sempre são intuitivos e bem compreendidos pelos alunos. Ao abordar um sistema cartesiano, é interessante introduzí-lo seguindo os passos:

(1) Solicitar representar no GeoGebra dois pontos quaisquer A e B e, depois, criar um vetor u que una A a B.

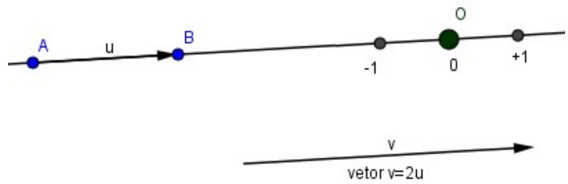
(2) Questionar o que acontece ao multiplicar o vetor u por 2 ou 3? E por 5? Para qual sentido ele está indo? No sentido geométrico do vetor vai gerar uma reta passando pelos pontos A e B. Essa reta tem direção inclinada com relação a horizontal? Está sempre com essa inclinação? Em relação ao sentido é escolhida uma unidade de medida (que pode ser o comprimento do vetor) e marcado um ponto O sobre a reta (que pode ser o ponto inicial A, origem do vetor), e designar o sentido positivo sendo o que vai de A para B. O sentido oposto é designado negativo.

(3) Criar uma circunferência de centro O e o raio igual a 1 unidade (extremidade do vetor inicial). Movimentar a extremidade do vetor sobre a circunferência para verficar que há mudança de direção, não de sentido e nem de módulo do vetor.

(4) Criar uma reta passando pelos pontos A e B. Com o compasso, transferir a medida do vetor inicial para esta reta, deslocando sua origem para B e determinando sua extremidade, à qual corresponderá a uma medida 2 e, assim por diante, neste sentido. Por sua vez, o mesmo pode ser feito, a partir de A para a esquerda, sentido contrário, determinando os correspondentes valores negativos dos anteriores (Figura 6).

ISSN: 2316-9745
TRABALHO COMPLETO

Figura 6 – Representação figural do conjunto dos inteiros:



Fonte: Construção dos autores

Observe que, nesta atividade, o objetivo foi de representar (explorar) um vetor e um sistema cartesiano unidimensional; compreender conceitos de multiplicação de um escalar por um vetor, direção, sentido, módulo do vetor, reta numerada e unidimensional.

A atividade aqui explorada pode ir além do simples objeto matemático, emergindo para a Física, elementos característicos do conceito de vetor, ou seja, uma partícula vagando no espaço, um elétron, que após uma corrente ser elevada a ordem MeV (mega eletrovolt) escapa da corrente de um filamento em uma ampola de vácuo e viaja no espaço até se chocar a um material alvo. Isso acontece em um aparelho de Raios X convencional, contudo podemos representar vetorialmente por eixos cartesianos o comportamento de fenômenos envolvendo os elétrons livres (Figura 7).

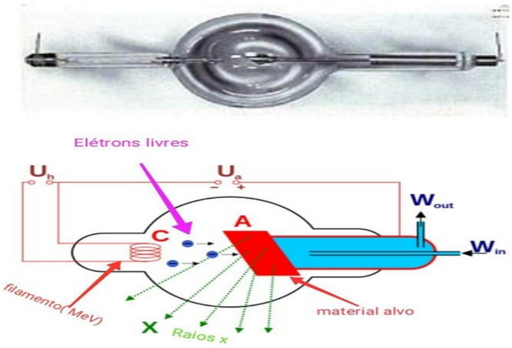


Figura 7 – Movimento vetorial de elétrons

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ampola_de_raios_X.

Percebemos, no desenrolar da disciplina, que o mesmo pode ser visualizado e criado para a conversão entre os três tipos de registros: numérico, verbal e geométrico e este foi o diferencial que proporcionou aos autores trazerem, como alunos, o indicativo que os levou à compreensão de conceitos que, na formação inicial não foram bem assimilados, por exemplo, não distinguindo bem sentido de direção.

Na sequência dos trabalhos, estudo similar foi feito nas representações do R^2 e do R^3, explorando outros elementos geométricos tendo sido fundamental o conhecimento exploratório do GeoGebra. Particularmente, em nosso estudo explorarmos conceitos na Física, em que podemos utilizar essas questões dentro de um contexto interdisciplinar aliando a Física e a Matemática como no caso do movimento MRU (movimento retilíneo uniforme) e MRUV (movimento retilíneo uniformemente variado).

4. CONSIDERAÇÕES

A construção geométrica no GeoGebra é um passo a passo, que busca estabelecer reflexões e conexões entre o conteúdo, suas formas de representação e construção por meio da visualização.

Isso impacta no plano cognitivo do aluno e auxilia no desenvolvimento da noção de organização do pensamento, no planejamento estratégico, aguçando a curiosidade, controlando a ansiedade, ativando áreas de foco, de concentração e de raciocínio lógico. Além disso, ativa o sistema de recompensa, ou seja, aquela sensação boa de ter conseguido motivar o aluno a aprender e a buscar mais conhecimento.

Segundo a Teoria de Duval, quando o aluno consegue mudar de registro, diferenciando o objeto de sua representação, está ocorrendo uma aprendizagem significativa e ele consegue mobilizar, pelo menos, dois registros de representação diferentes.

As representações, sejam elas geométricas no GeoGebra ou algébricas no papel, têm funções de objetivação e comunicação, segundo Duval (2008), isto é, representar e comunicar conhecimentos e construir conhecimentos.

Por isso, acreditamos que essa forma de abordar o conteúdo seja mais significativa para o aluno e proporcione mais conhecimentos, como experienciado em uma disciplina do curso de um programa de Pós-Graduação e cujas atividades pretendemos aplicar em uma turma do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

AMPOLA DE RAIOS X. In: **Wikipédia: a enciclopédia livre**. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Ampola_de_raios_X > Acesso em: 18 Set 2021.

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings**… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2021.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.). **APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA**. 4 ed. Campinas – SP: Papirus, 2008.

LEIVAS, J. C. P. (2009). **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

LEIVAS, J.C.P. Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma análise a priori de conhecimentos de um grupo de pós-graduandos. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 26, n. 70, p.17-30, jan./mar. 2021. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/2052/1935. Acesso em 29 jul. 21.