Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS E PROPRIEDADES DE SUCESSÕES NUMÉRICAS

Aluna: Lucilene Oenning Saraiva

Orientadora: Profª. Drª. Vanilde Bisognin

INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar as possibilidades que a metodologia de investigação matemática pode proporcionar ao ensino e aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas. Os resultados obtidos permitiram constatar as dificuldades do grupo de formular hipóteses, argumentar e formalizar ideias matemáticas. Além disso, foi possível constatar que atividades investigativas desenvolvidas na etapa de formação inicial podem incentivar seu uso na futura prática docente e permitir uma mudança de concepção sobre o ensino de matemática e da postura do professor no trabalho de sala de aula.

OBJETIVO GERAL

Analisar as possibilidades que a metodologia da investigação matemática proporciona na descoberta e aprendizagem dos conceitos e propriedades de sucessões numéricas em uma turma do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver um conjunto de atividades visando à construção dos conceitos e propriedades de sucessões, mediados pela investigação matemática.
- Certificar, por meio das atividades, a aprendizagem adquirida pelos alunos, quanto à metodologia de investigação matemática.
- Verificar como os alunos envolvem-se com atividades que privilegiam a construção de conceitos de sequências numéricas por meio da metodologia de investigação matemática.
- Verificar as dificuldades encontradas pelos alunos acerca das atividades e de que maneira lidam com essas dificuldades.

ABORDAGEM METODOLÓGICA

Esta pesquisa se caracteriza como qualitativa.
Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram:

- Observação participante
- Diário de campo do pesquisador
- Diário de campo dos alunos
- Questionário

UNIDADES DE ENSINO

Unidade de ensino I → Reconhecendo sequências e descobrindo conceitos

Unidade de ensino II → Construindo o conceito de limites de sequência

Unidade de ensino III → Sequências convergentes e divergentes

I Unidade de Ensino

RECONHECENDO SEQUÊNCIAS E DESCOBRINDO CONCEITOS

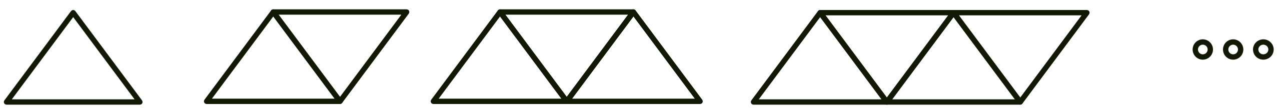
Objetivos:

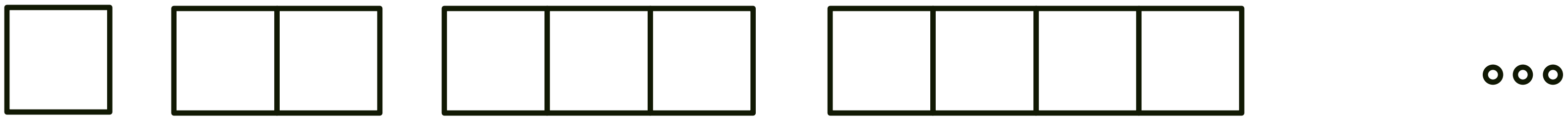
- Compreender conceito de sequência;
- Identificar regularidades e compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica;
- Desenvolver a capacidade de trabalhar com vários tipos de representações;
- Traduzir, por escrito e oralmente, os raciocínios desenvolvidos;

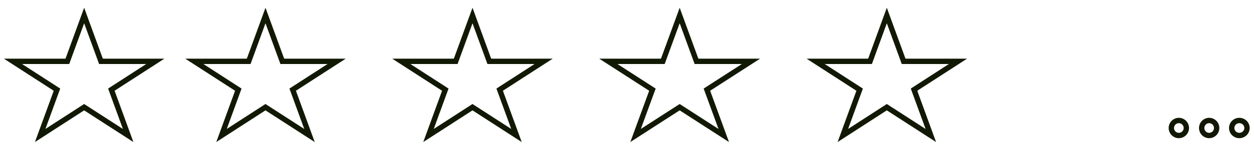
ATIVIDADES:

As situações a seguir podem ser construídas utilizando-se palitos de fósforo.

1) Defina matematicamente essas construções e elabore um relatório, com o seu grupo de trabalho, no qual constem os passos de cada uma das investigações.
Não esqueça, é a quantidade de palitos que importa!!!

a) 

b) 

c) 

d) Uma sequência pode ter um número finito de termos? Argumente.

2) Tente encontrar uma expressão para representar:

a) Os números naturais;

b) Os números pares;

c) Os números ímpares;

d) Os múltiplos de três;

e) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

f) $(2, 0, 2, 0, 2, \ldots)$

g) $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right)$

3) Represente graficamente as sucessões (a), (e), (f) e (g). Quais considerações podem ser feitas com relação a eles?

Solução

4) Que conjuntos de números estão representados no eixo do x e do y? Fazendo uma analogia à definição de função, como vocês definem uma sequência?

Solução

5) Considere as sequências:

a) $(5, 10, 15, 20, 25, \ldots)$

b) $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$

c) $(4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$

d) $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{9}, \ldots\right)$

e) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots.)$

- Comparando os termos de cada uma das sequências,anteriores, isto é, 1º termo com o 2º termo; o 2º termo com o 3º termo e assim por diante, o que se pode concluir em relação a cada sequência?

6)A sequência:

$$a_n = \frac{3}{n+5}$$

é crescente ou decrescente? Prove.

Atividade complementar

1)Verifique dentre os seguintes exemplos, quais representem sequências. Justifique sua resposta.

a)

x	y
1	-7
2	-5
3	-3
4	-2
...	...

b)

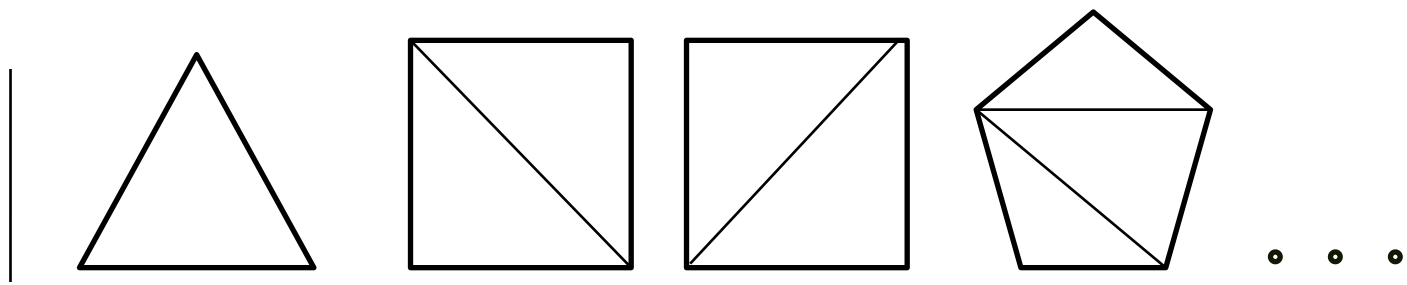
x	y
1	5
2	3
2	1
3	0
...	...

c) $f: \begin{array}{l} \square \to \square \\ n \mapsto f(n) = 2n - 1 \end{array}$

d) $(-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots)$

e) $(1, 3, 5, 7, 9)$

2) De quantas maneiras podemos dividir um polígono de n lados em triângulos, ligando os vértices com segmentos de retas sem que estes se cruzem?



II Unidade de Ensino

Construindo o conceito de limites de sequência

Objetivos:

- Determinar se uma sequência é limitada;
- Identificar o limite inferior e o limite superior das sequências;
- Construir o conceito de limite de uma sequência;
- Compreender a convergência e divergência de uma sequência;
- Traduzir, por escrito e oralmente, os raciocínios desenvolvidos

ATIVIDADES

1) Considerando as sequências cujos termos gerais são:

$$a_n = \frac{(15-n)}{2} \qquad b_n = \frac{n}{2} \qquad c_n = \frac{6}{n}$$

- Escrevam em seu caderno os dez primeiros termos, o 20º, 40º, 100º termo. Construam os gráficos, observem estas sequências e escrevam suas considerações sobre cada uma delas.

- Entre quais valores do eixo do y parecem estar os termos de cada sequência? Existe um valor limite inferior ou superior?

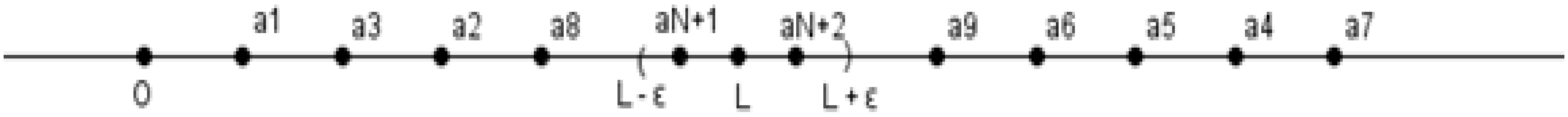
Solução

2) Fazendo associação com o limite de uma função em um ponto como vocês representariam este valor limite de cada sequência? O que se pode concluir sobre a convergência ou divergência de cada uma delas? Justifique. Dê exemplos de sequências que são convergentes e outras que são divergentes.

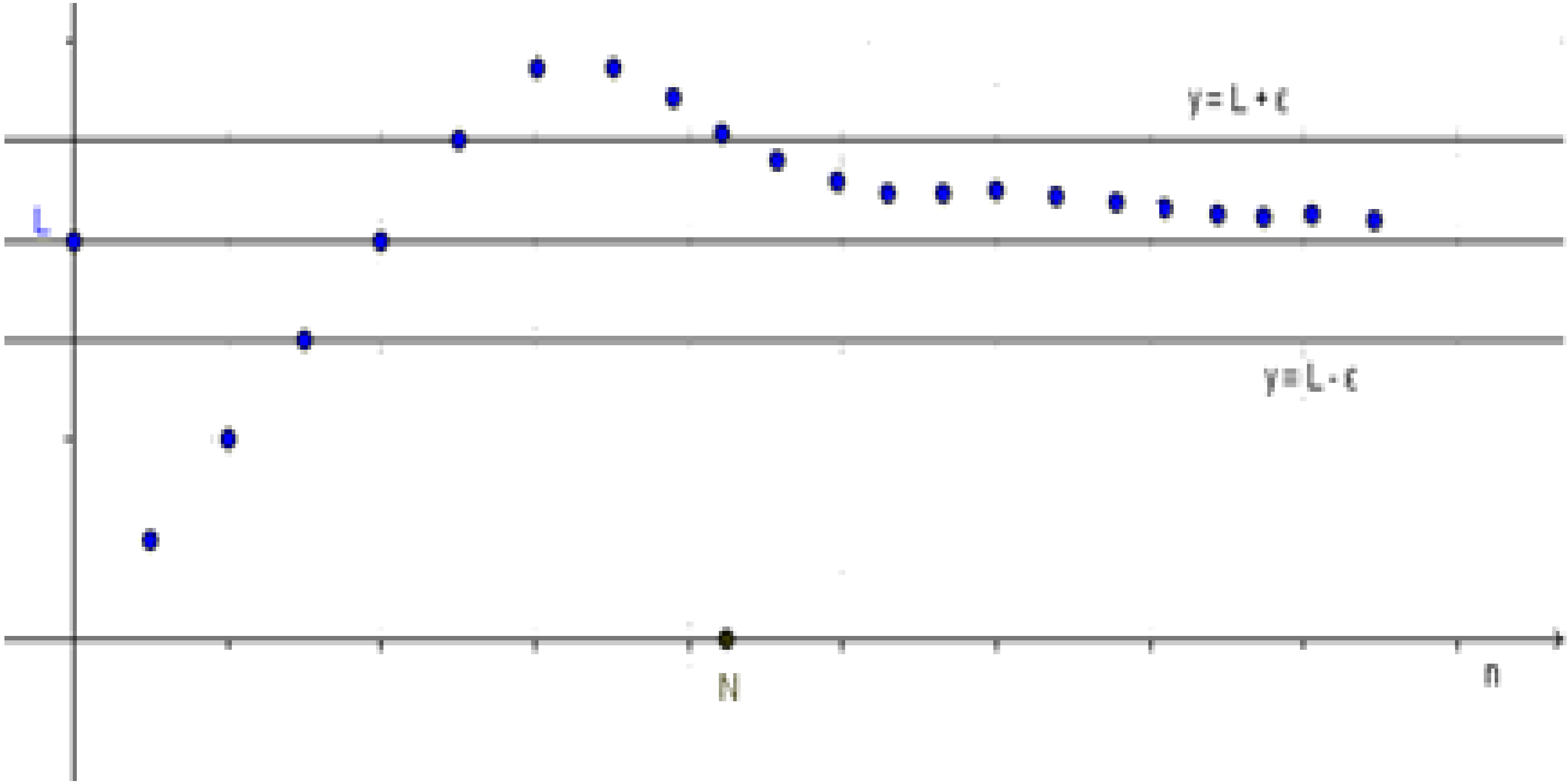
3) Leia com atenção o texto a seguir e após, com base nas informações tente responder a questão apresentando uma justificativa.

Solução

Se uma sequência (a_n) tem uma limite L quando $n \to \infty$ então podemos representar graficamente, sobre uma reta, esta situaçãoorganizando os termos $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_N, a_{N+1} ...)$sobre a mesma da seguinte forma: Tome $\varepsilon > 0$, pequeno, então existe $N \in \mathbb{N}$ $n > N$ tal que para os termos, a partir de *N* ficam todos no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Fazendo esta representação temos,



ou



Observe o exemplo: Seja a sequência $a_n = \dfrac{1}{n+2}$, tem-se que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$

Assim, $\forall \varepsilon > 0$ devemos achar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{1}{n+2} - 0\right| < \varepsilon, \forall n \geq N$. Ou seja, devemos mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n+2} < \varepsilon, \forall n \geq N$. (1)*

Para provar isso observe que como $n \geq N$ segue que $n+2 > n \geq N$ e assim $\dfrac{1}{n+2} \leq \dfrac{1}{N}$.

Comparando com (1)*, segue que $\dfrac{1}{n+2} \leq \varepsilon$ desde que $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$ ou seja, $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ .Isto conclui a prova.

Agora considere a sequência cujo termo geral é: $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$
Qual é o limite da sequência? Determine *N* e faça a representação geométrica sobre uma reta ou no plano cartesiano.

Solução

4) Considere a sequência cujo termo geral é $a_n = (-1)^n$. Escreva os primeiros termos da sequência, represente graficamente os termos e analise se a sequência converge ou diverge. Argumente.

Solução

5) Escreva o que você entende por $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ e escreva em linguagem simbólica esta representação.

Solução

Atividade complementar

1) Considere as seguintes sequências:

$$(a_n) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(b_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \ldots\right)$$

$$(c_n) = (0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots)$$

$$(d_n) = \left(-2, -\frac{3}{6}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \ldots\right)$$

$$(e_n) = (3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots)$$

$$(f_n) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

$$(g_n) = \left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots\right)$$

$$(h_n) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{5}, \frac{1}{36}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$$

$$(i_n) = (1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, \ldots)$$

$$(j_n) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{36}, 0, \frac{1}{64}, \ldots\right)$$

Complete o quadro abaixo, marcando com X as respostas corretas.

Característica	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(e_n)	(f_n)	(g_n)	(h_n)	(i_n)	(j_n)
Crescente										
Decrescente										
Não monotona										
Limitada										
Ilimitada										
Convergente										
Não convergente										

Solução

III Unidade de Ensino

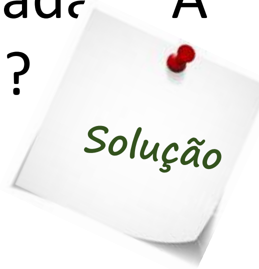
PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA

Objetivos:

- Estudar a propriedade: "Toda sequência monótona e limitada é convergente".

ATIVIDADES

1) Investigue se a sequência cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{5^n}$ é monótona e verifique se é limitada. A sequência é convergente? Se sim, qual é o seu limite?



2) Repita o mesmo para a sequência cujo termo geral é $b_n = 1 + \frac{1}{n}$

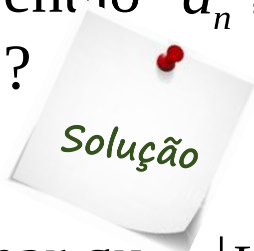
3) Escreva um exemplo de uma sequência de termos positivos que não é monótona mas é convergente.

4) Leia com atenção o texto que segue e tente, com base no que já estudou anteriormente, responder as questões.

\- Considere (a_n) uma sequência crescente e limitada. Sendo crescente e limitada o conjunto $S = \{a_n \ / \ n \geq 1\}$ tem supremo *L?* Para responder esta pergunta consulte no livro indicado pelo professor responsável pela disciplina, o conceito de supremo (e também de ínfimo) de um conjunto limitado.

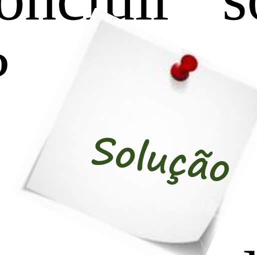
\- De acordo com a definição de supremo tem-se que se $L = \sup S$ dado $\varepsilon > 0$, o elemento $L - \varepsilon$ não é uma cota superior para S e portanto existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N > L - \varepsilon$ para algum inteiro N?

-Sendo (a_n) crescente é possível afirmar que $a_n \geq a_N$ para cada $n \geq N$. Se isto é verdade então $a_n \geq a_N > L - \varepsilon$ e assim pode-se afirmar que $0 < L - a_n < \varepsilon$?



- Além disso, pode-se afirmar que $|L - a_n| < \varepsilon$ sempre que $n > N$?

- Se isto é verdadeiro o que se pode concluir sobre a convergência da sequência (a_n) e de seu limite?



- Se considerarmos (a_n) uma sequência decrescente e limitada pode-se chegar a mesma conclusão? Argumente

5) Toda sequência que tem limite é limitada? E a recíproca é verdadeira? Justifique.

Atividade complementar

1) Coloque verdadeiro(V) ou falso (F)

( ) Toda sequência que converge é limitada

( ) toda sequência limitada é convergente.

( ) Toda sequência convergente é monótona.

( ) Toda sequência monótona é convergente.

( ) Toda sequência monótona e limitada converge.

( ) Toda sequência constante converge.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. de S. **Análise matemática para licenciatura.** 3 ed. São Paulo: Blucher, 2006.

BARRETO, B. F.; BARRETO, C. X. **Matemática aula por aula.** Volume único, São Paulo: FTD, 2000.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; BURIOL, C.; Atividades de investigação como alternativa metodológica para o ensino de matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** Pesquisa e debates. Recife: SBEM, 2009, p. 189-202.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; CURY, H. N..Conhecimentos de professores da Educação Básica sobre o conceito de função. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador.: SBEM, 2010.

BUENO, S. **Minidicionário da língua portuguesa**. São Paulo: FTD, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília/D.F, 2002a.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, Brasília/D.F, 1998a.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília/D.F, 1998b.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino médio. Brasília/D.F, 1998c.

______. Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília/D.F, 1998d.

______. Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica. Brasília/D.F, 2002b.

BRAUMANN, C. Divagações sobre Investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2002, Coimbra. Anais Disponível em: <http://www.esec.pt/eventos/xieiem/pdfs/Braumann.PDF>**.** Acesso em 20 mai. 2011.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas de investigativas de Matemática**. 2004. Dissertação (Mestrado Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2004.

CRISTOVÃO, E. M. Aulas investigativas: Só mais um modismo? In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. (Org). **Histórias e investigações de/em aulas de matemática**, Campinas, SP: Alínea, 2006. p. 125-136

DANTE, L. R. **Matemática.** 1 ed. São Paulo: Ática, 2005.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, P.; LEAL, L.C; PONTE, J.P (Eds). **Investigar para aprender Matemática,** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996, p.25-48.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** Percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat 99.** Lisboa: APM, 1999. Disponivel em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Fonseca-etc(profmat-MPT).doc>. Acesso em 16 de maio de 2010.

FRIEDMANN VALLADARES, C., LOZANO, A. Modelagem e modelos discretos: uma necessidade do ensino atual. In: BARBOSA, C. B., CALDEIRA, A. D., ARAÚJO, J. L. (Orgs). **Modelagem na educação matemática brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007.

FROTA, M. C. R. **Investigações na sala de aula de cálculo. REUNIÃO ANUAL DA ANPED,** 29º, 2006, Caxambu- MG. Anais. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/29portal.htm>. Acesso em: 22 nov. 2010.

FROTA, M. C. R. **Práticas investigativas e experiência Matemática.ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO,** 3, 2005, Ouro Preto**. Anais.** Disponível em:**<**http://www.matematica.pucminas.br/Grupo%20de%20Trabalho/Maria%20clara/Pr%C3%A1ticasDocumento%20do%20Acrobat.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2011.

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana.** São Paulo: Autores Associados, 1999.

GOMES, A, A, M. **Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (EJA): o movimento de mobilizar-se e apropriar-se de saber (ES) matemático (s) e profissional (is).** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2007

GOMES, A. A. M.; NACARATO, A. M. **Aulas Investigativas na Educação de Jovens e Adultos (EJA):** Possibilidades e Limites dessa Metodologia no Ensino da Matemática. ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2006, Minas gerais. Disponível em: <http://fae.ufmg.br/ebrapem/comunicações.htm>. Acesso em 27 set. 2011.

LEITHOLD, L. **O cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed**.** São Paulo: Harbra, 1994. v. 2

LIMA, E. L. (editor) **Exame de Textos:** análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LOPES, J. de A. **Livro didático de matemática: concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendência em educação matemática.** 2000. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000.

LÜDKE**,** M.; ANDRÉ**,** M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas**.** São Paulo: EPU, 1986.

MICHEL, M. H. **Metodologia e pesquisa científica em ciências sociais.** 2 ed. São Paulo: Atlas, 2009.

NUNES, M. N. F. **Sequências numéricas:** um estudo da convergência através de atividades. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

OLIVEIRA, H.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds.), **Actas do ProfMat.** Lisboa: APM, 1996. p. 207-213

PAIVA, M. R. **Matemática.** v. 2, São Paulo: Moderna, 1995.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Ensino de Primeiro Grau. **Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná.** 3 ed., Curitiba: SEED/DEPG, 2003.Versão eletrônica.

PEREIRA, M. C. N. **As investigações matemáticas no ensino-aprendizagem das sucessões:** Uma experiência com alunos do 11º ano de escolaridade. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2004.

PINTO, M. M. F. Re-visitando uma teoria: O desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de analise real. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**. Recife: Gráfica A Única Ltda., 2009, v. 1, p. 27-42.

PONTE, J. P; Explorar e investigar em matemática: Uma actividade no ensino e na aprendizagem. **UNIÓN:** Revista Iberoamericana de Educación Matemática**,** n. 21, p. 13-30, marzo, 2010.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do profmat**. Lisboa: APM, 2003a, p. 25-39

PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal.** Investigar em Educação, v.2, 2003b, p. 93-169.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante,** v.7 n. 2, p. 41-70, 1998.

SANTOS, M. B. dos. **Saberes de uma prática inovadora**: Investigação com egressos de um curso de Licenciatura Plena em Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SERRAZINA, L. A formação para o ensino de matemática: perspectivas futuras. **Educação Matemática em Revista,** São Paulo, v. 10, n. 14, p. 67-73, ago. 2003.

STEWART, J. **Cálculo**. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2001. V.2

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**, 5 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

I - Solução atividade 1

a) A sequência formada é: (3, 5, 7, 9,...)

Seu termo geral é indicado por $a_n = 2n+1, n \in \square$

A sequência é crescente, pois $2n+1 < 2(n+1)+1 < 2n+3$. Logo

$a_n < a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Além disso, trata-se de uma progressão aritmética de razão 2.

b) A sequência formada é: (4, 7, 10, 13,...)

Seu termo geral é indicado por $a_n = 3n+1, n \in \square$

A sequência é crescente, pois $3n+1 < 3(n+1)+1 < 3n+4$. Logo

$a_n < a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Além disso, trata-se de uma progressão aritmética de razão 3.

c) A sequência formada é: (4, 7, 10, 13,...)
Seu termo geral é indicado por $a_n = 10$
A sequência é constante, ou não-crescente, ou não-decrescente.
Além disso, trata-se de uma progressão aritmética de razão 0.

d) Não, pois seu domínio é o conjunto dos números naturais.

I – Solução atividade 2

a) $a_n = n, n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$

d) $a_n = 3n, n \in \mathbb{N}$

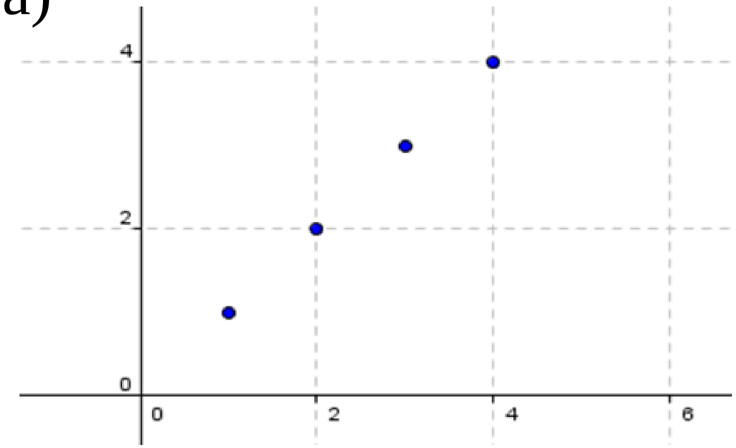
e) $a_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

f) $a_n = 1 + 1(-1)^n, n \in \mathbb{N}$ ou $a_n = \begin{cases} 2, se\ n\ par \\ 0, se\ n\ ímpar \end{cases}$

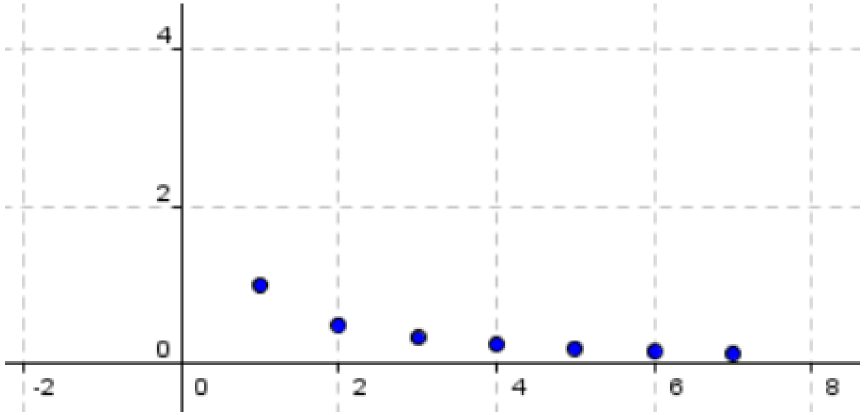
g) $a_n = \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$

I – Solução atividade 3

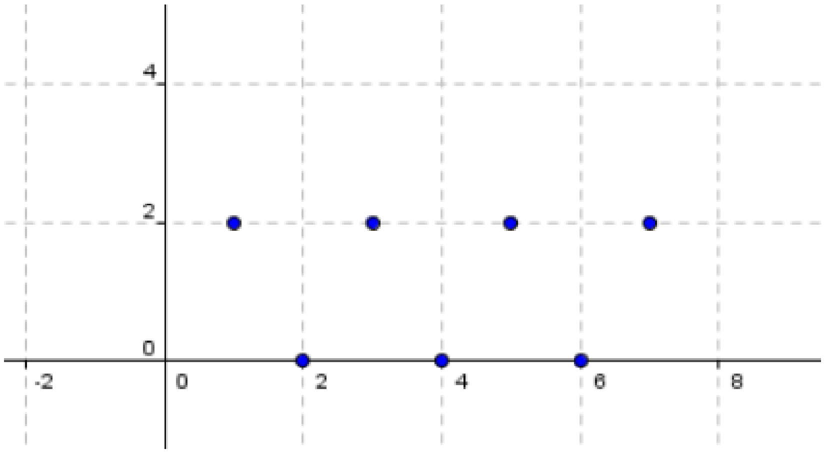
a)



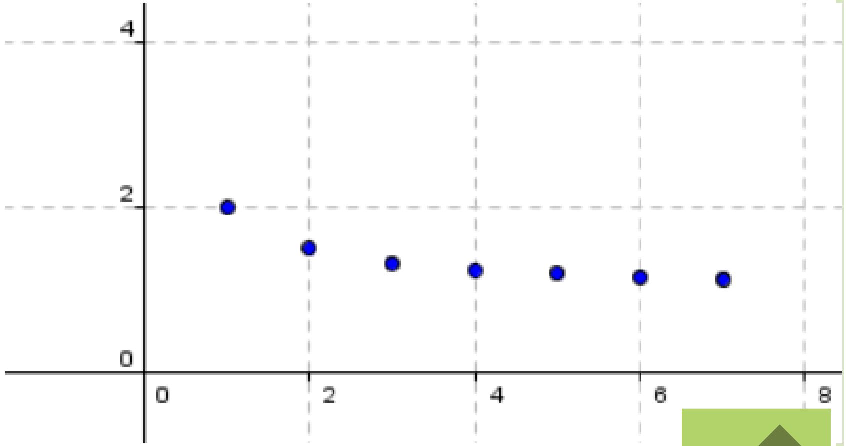
e)



f)



g)



I – Solução atividade 4

Definição de Sequência

Uma sequência de números reais é uma função $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ com domínio no conjunto dos números naturais e contradomínio no conjunto dos números reais tal que cada *n* pertencente ao $\mathbb{N}$ se associa a um número real a_n chamado n-ésimo termos da sequência, que pode ser expressa por $a_{(n)}, n \in \mathbb{N}$ ou simplesmente a_n .

I – Solução atividade 5

Os termos gerais são

a) $a_n = 5n$

b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left[1+(-1)^{n+1}\right]$

c) $a_n = 4$

d) $a_n = \frac{3}{3+n}, n \geq 2$

e) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots)$

Comparando os termos de cada uma das sequências temos que:

a) Crescente

b) Alternada

c) Constante

d) Decrescente

e) Não-decrescente

Definições

Sequência crescente (estritamente crescente): uma sequência (a_n) é dita crescente se $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Sequência decrescente (estritamente decrescente): uma sequência (a_n) é dita decrescente se $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Sequência não-crescente (decrescente): uma sequência (a_n) é dita não-crescente se $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Sequência não-decrescente (crescente): uma sequência (a_n) é dita não-decrescente se $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Sequência monótona: uma sequência (a_n) é dita monótona se for crescente, decrescente, não-crescente ou não-decrescente

I - Solução atividade 6

Devemos mostrar que $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ isto é, como:

$n+5 < n+6$ segue que, $\frac{1}{n+5} > \frac{1}{n+6}$ logo: $\frac{3}{n+5} > \frac{3}{n+6}$

Portanto $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$

I – Solução atividade complementar 1

As alternativas (a), (c) e (d) representam sequências, pois são funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

A alternativa (b) não representa uma sequência, pois temos um elemento do domínio com duas imagens diferentes.

Já a questão (e) não representa uma sequência, pois seu domínio é um conjunto limitado.

I – Solução atividade complementar 2

O número de maneiras diferentes que podemos dividir um polígono em triângulos, sem que os segmentos de reta se cruzem, forma a seguinte sequência:

$$(1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots)$$

Esta sequência é conhecida como Sequência de Catalam. Seus termos podem ser encontrados utilizando-se o seguinte termo geral:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} com\ n \geq 1$$

II – Solução atividade 1

a) $(7, 6.5, 6, 5.5, 5, 4.5, 4, 3.5, 3, 2.5, 2, \ldots)$

$$a_{20} = -2.5; \;\; a_{40} = -12.5; \;\; a_{100} = -42.5$$

b) $(0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, \ldots)$

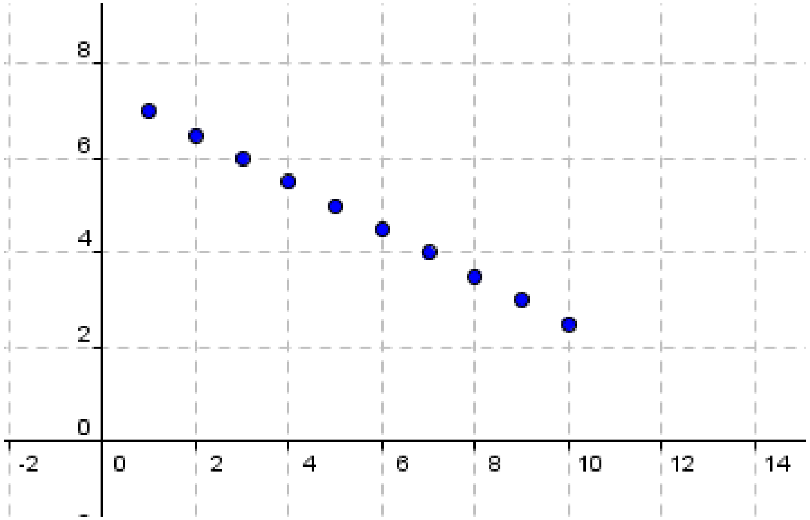
$$a_{20} = 10; \;\; a_{40} = 20; \;\; a_{100} = 50$$

c) $(6, 3, 2, 1.5, 1.2, 1, 0.86, 0.75, 0.66, 0.6, \ldots)$

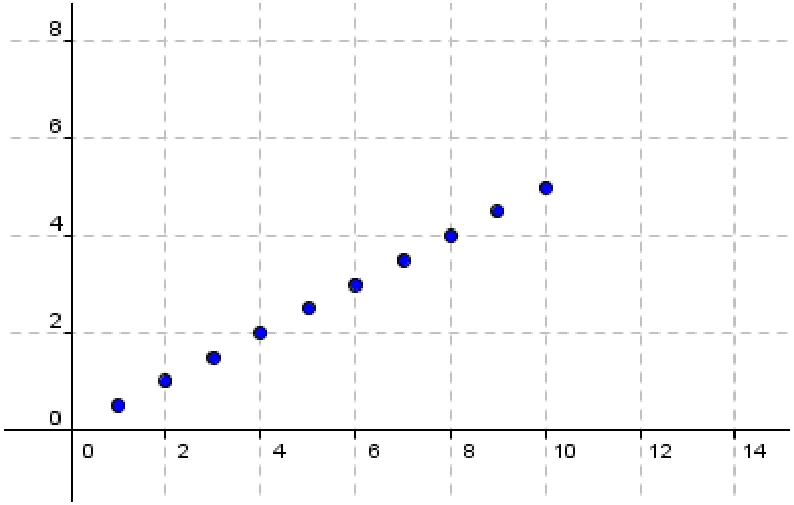
$$a_{20} = 0.3; \;\; a_{40} = 0.15; \;\; a_{100} = 0.06$$

Temos a seguir representação gráfica de cada uma das sequências.

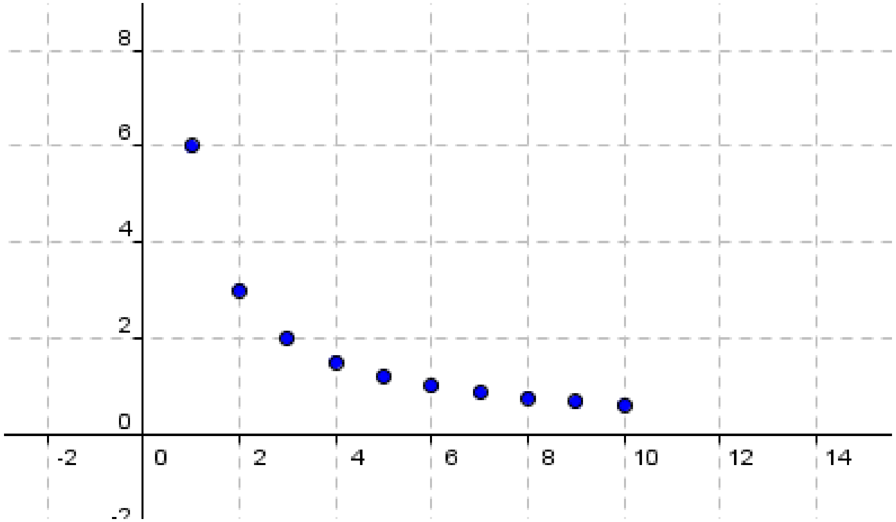
a)


8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
12
14

b)


8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14

c)


8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
12
14

Os intervalos entre os quais parecem estar os termos das sequências, ou seja suas imagens são:

a) $\left]-\infty, 7\right]$

b) $\left[0.5, \infty\right[$

c) $\left[0, 6\right]$

A sequência apresentada na letra (a) tem o valor 7 como limite superior.
Já a sequência apresentada na letra (b) possui limite inferior igual a 0,5.
Por fim a sequência apresentada na letra (c) tem o valor 0 como limite inferior e o valor 6 como limite superior .

II – Solução atividade 2

Uma sequência (a_n) tem limite L e escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \to L$ quando $n \to \infty$. Se pudermos tomar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao tomar n suficientemente grande.

Deste modo temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(15-n)}{2} = -\infty; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} = 0;$$

Deste modo temos que a_n e b_n são divergentes, pois a medida em que os valores de n crescem os termos da sequência não se aproximam de valor algum. Já a sequência c_n é convergente, pois os termos da sequência , a medida em que n cresce, se aproximam de 0.

II - Solução atividade 3

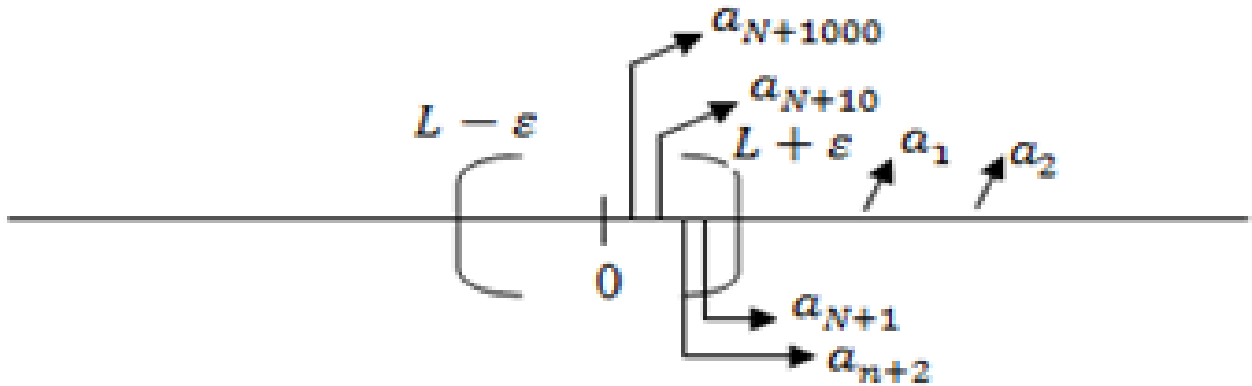
Temos que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, assim $\forall\varepsilon>0$, devemos encontrar $N\in\mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon, \forall n\geq N.$

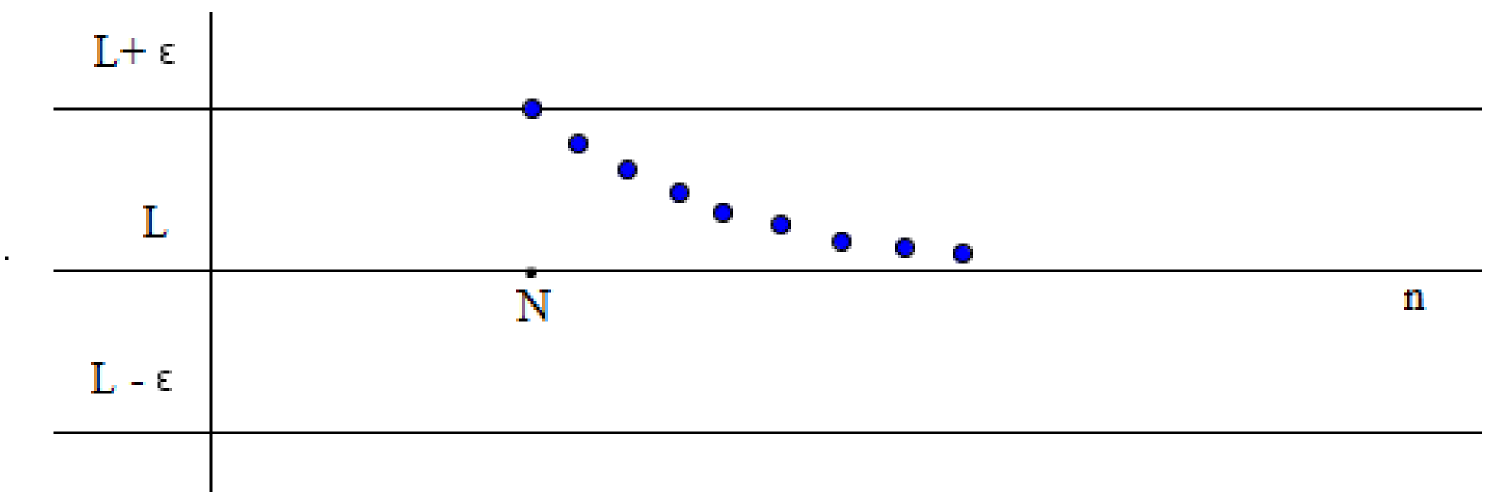
Ou seja, devemos mostrar que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}<\varepsilon, \forall n\geq N.(1)*$

Como $n\geq N$ segue que $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}$.

Comparando com (1)*, segue que $\frac{1}{n}\leq\varepsilon$, desde que, $\varepsilon=\frac{1}{N}$ ou seja, $N=\frac{1}{\varepsilon}$.

Representação gráfica na reta e no plano.





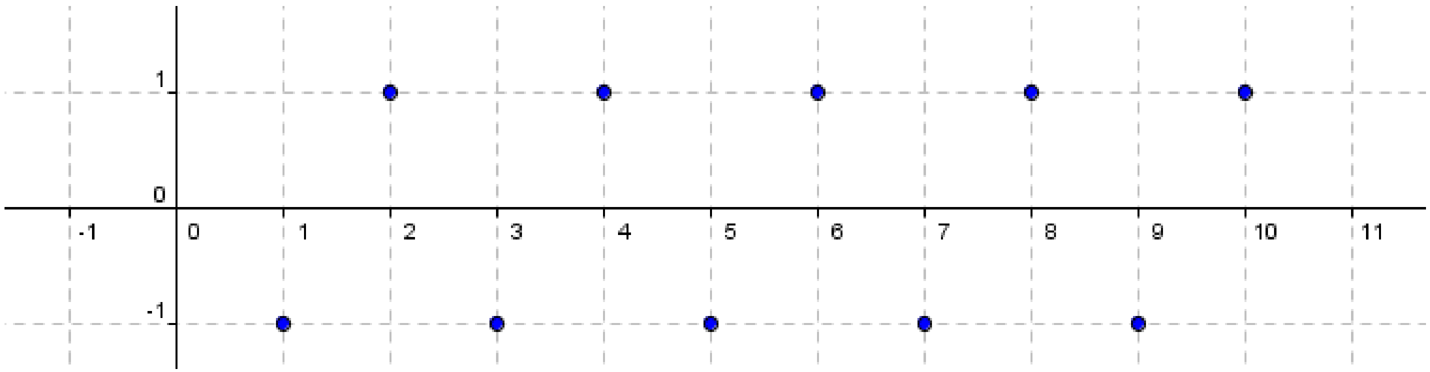
II – Solução atividade 4

Primeiramente observe que a sequência é limitada, pois seus termos ficam entre -1 e +1.

$$a_n = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$$

Temos que o limite inferior da sequência é -1 e o limite superior é +1. como estes limite são diferentes a sequência é divergente.

Graficamente temos:



II – Solução atividade 1

Significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que se n > N então $a_n > M$.

Isso significa que o limite da sequência não existe, isto é $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ e a sequência é divergente.

II- Solução atividade complementar 1.

Característica	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(e_n)	(f_n)	(g_n)	(h_n)	(i_n)	(j_n)
Crescente		X		X	X					
Decrescente							X			
Não monotona	X		X			X		X	X	X
Limitada	X	X		X		X	X	X		X
Ilimitada			X		X				X	
Convergente		X		X		X	X	X		X
Não convergente	X		X		X				X	

III - Solução atividade 1

Ao calcularmos os termos da sequência temos: $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots\right)$

Devemos mostrar que $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $\frac{1}{5^n} > \frac{1}{5^{n+1}}$.

Como $5^n < 5^{n+1}$, segue que $\frac{1}{5^n} > \frac{1}{5^{n+1}}$. Portanto $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$

Seja a sequência $a_n = \frac{1}{5^n}$ tem se que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0$, devemos encontrar

$N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{1}{5^n} - 0\right| < \varepsilon, \forall n \geq N.$

Ou seja, devemos mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{5^n} < \varepsilon, \forall n \geq N (1)*$

Como $n \geq N$ segue que $\frac{1}{5^n} \leq \frac{1}{N}$ Comparando com (1)* segue que

$\frac{1}{5^n} \leq \varepsilon$ desde que $\varepsilon = \frac{1}{N}$, ou seja, $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

Logo concluímos que a sequência é convergente e converge para o seu limite .

III – Solução atividade 2

Ao calcularmos os termos da sequência temos: $(2, 1.5, 1.3, 1.25, 1.2, \ldots)$

Devemos mostrar que $b_n > b_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{(n+1)}$

Como $n < n+1$, segue que $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Somando 1 em ambos os lados temos $1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{(n+1)}$. Portanto $b_n > b_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Seja a sequência $b_n = 1+\frac{1}{n}$ tem se que $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$, devemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|1+\frac{1}{n}-1\right| < \varepsilon, \forall n \geq N$. Ou seja, devemos mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq N (1)*$ Como $n \geq N$ segue que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$.

Comparando com (1)* segue que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ desde que $\varepsilon = \frac{1}{N}$, ou seja, $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Logo concluímos que a sequência é convergente e converge para o seu limite .

III – Solução atividade 3

a) $\left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots\right)$

b) $\left(1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \ldots\right)$

III - Solução atividade 4

- Sim. Por que a sequência é limitada. Assim ela tem um limite inferior e um limite superior.

- Sim. De fato, sendo L o supremo e como $L-\varepsilon$ é menor que L, então para algum N tem-se que (a_n) é maior que $L-\varepsilon$.

- Sim. De fato, da desigualdade acima tem-se o resultado

- Sim. Porque $L-\varepsilon$ é positiva.

- Sim. Conclui-se que se a sequência for limitada e monótona esta sempre será convergente e converge para o SUPREMO .

Considere (a_n) uma sequência decrescente e limitada.
Sendo (a_n) decrescente e limitada o conjunto $S=\{a_n / n \geq 1\}$ tem ínfimo L.
De acordo com a definição de ínfimo tem se que L= inf S, dado $\varepsilon > 0$, o elemento $L+\varepsilon$ não é uma cota inferior para S, portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N < L+\varepsilon$.
Sendo (a_n) decrescente temos que $a_n \leq a_N$ para cada $n \geq N$.
Assim $a_n \leq a_N < L+\varepsilon$ e então $0 < L-a_n < \varepsilon$.
Logo $|L-a_n| < \varepsilon$ sempre que $n > N$.
Portanto conclui-se que se a sequência for decrescente e limitada esta será convergente e converge para o ÍNFIMO.

III – Solução atividade 5

- Toda sequência que tem limite é limitada, no entanto a recíproca: “Toda sequência limitada tem limite” ou seja, “toda sequência limitada é convergente, não é verdadeira. Como exemplo, temos a sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ que é limitada superiormente por 1 e inferiormente por 0. Porém, como estes limites são diferentes a sequência é divergente, ou seja, não possui limite.

III- Solução atividade complementar 1.

(V) Toda sequência que converge é limitada

(F) toda sequência limitada é convergente.

(F) Toda sequência convergente é monótona.

(F) Toda sequência monótona é convergente.

(V) Toda sequência monótona e limitada converge.

(V) Toda sequência constante converge.